2024 考研 301

数学

复习笔记

wjl

2023 年 12 月 20 日

目 录

1 一元函数

1.1 函数极限与连续

1. **等价无穷小**:
$(1+x)^{\frac{1}{x}}-1\sim -\frac{e}{2}x(x\to 0^+)$, $1-\cos^\alpha x\sim \frac{\alpha}{2}x^2(x\to 0)$, $\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x(x\to 0)$.
$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$, $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.
2. **变上限积分**: 当 $x\to 0$ 时, $f(x)\sim ax^m, g(x)\sim bx^n, ab\neq 0$, m,n 为正整数, 则 $F(x)$ 是 x 的 $n(m+1)$ 阶无穷小: $F(x)=\int_0^{g(x)}f(t)dt\sim\int_0^{bx^n}at^m dt\sim Cx^{n(m+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})-\frac{1}{2}(n+1)\right]=\lim_{n\to\infty}\left\{n\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}+o\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]-\frac{1}{2}(n+1)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}+\lim_{n\to\infty}n^2o\left(\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\underline{-\frac{1}{6}}.$$

1.2 一元函数微分学

1. **反函数的导数**: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, $x'=\frac{1}{y'}$, $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$, $x''=-\frac{y''}{(y')^3}$.

2. **曲率和曲率半径**: 曲率 $k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$, 曲率半径 $R=\frac{1}{k}$.

1.3 一元函数积分学

1. **反常积分**: **2010-03, 2016-01**
比较判别法: $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1, & \text{收敛},\\ p\geqslant 1, & \text{发散}.\end{cases}$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1, & \text{收敛},\\ p\leqslant 1, & \text{发散}.\end{cases}$
1) 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x), a\leqslant x\leqslant +\infty$, 则
当 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛; 当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散。
2) 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0, g(x)\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$(有限或$\infty$), 则
a. 当 $\lambda\neq 0$ 时, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 有相同的敛散性;
b. 当 $\lambda=0$ 时, 若 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛;
c. 当 $\lambda=\infty$ 时, 若 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也发散。
2. **常用公式**:
1) 区间再现公式:
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx,\quad \int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx.$$
2) 华里士公式:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为大于1的奇数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}.\end{cases}$$
3) **对数-三角公式**:
$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{\begin{vmatrix}(e^{ax})' & (\sin bx)'\\ e^{ax} & \sin bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C,\quad \int e^{ax}\cos bxdx=\frac{\begin{vmatrix}(e^{ax})' & (\cos bx)'\\ e^{ax} & \cos bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C.$$

3. 极坐标表示的曲线在直角坐标系下的切线和法线：

24 超越 4-12 曲线 $r=1+\cos\theta$ 在点 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ 处的法线方程：$\underline{y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$.

$$\begin{cases} x\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{4}, \\ y\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases} \text{则 } \frac{dx}{dy}\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=\frac{dx/d\theta}{dy/d\theta}\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}=0\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

4. **旋转体体积**：

1）平面曲线绕定直线旋转：设平面曲线 $L: y=f(x), a\leqslant x\leqslant b$，且 $f(x)$ 可导，定直线 $L_0: Ax+By+C=0$，且过 L_0 的任一条垂线与 L 至多有 1 个交点，则 L 绕 L_0 旋转一周所得旋转体体积为：

$$V=\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b[Ax+By+C]^2|Af'(x)-B|dx.$$

2）平面曲边梯形绕 x 轴旋转：$\underline{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$，绕 y 轴旋转：$\underline{V=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx}$.

3）平面图形 $D=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\in[0,\pi]\}$ 绕<u>极轴</u>旋转：

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$

6. **旋转曲面的面积（侧面积）**：

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx.\quad S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt.$$

1.4 中值定理

1. 泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

2. 乘积求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 的逆用：$[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$，$\quad[f(x)\cdot f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$.

$\left[f(x)e^{\varphi(x)}\right]'=f'(x)e^{\varphi(x)}+f(x)e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=\left[f'(x)+f(x)\varphi'(x)\right]e^{\varphi(x)}$.

3. 商的求导公式 $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ 的逆用：$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$，$\quad\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$.

$[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，$\quad[\ln f(x)]''=\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\dfrac{f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}$.

4. **中值定理和不等式**：

1）积分中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

2）柯西积分不等式：$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$.

曲线 $x^3+y^3=3axy(a>0)$ 的渐近线：

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=k$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=b$，等式变形为 $1+(\dfrac{y}{x})^3=\dfrac{3a}{x}\cdot\dfrac{y}{x}$，两边取极限，得 $k=-1$.

则 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y+x)$，又 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$，等式变形为 $x+y=\dfrac{3axy}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3a\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2}$，

两边取极限，得 $b=-a$，即渐近线为 $\underline{y=-x-a}$.

2 多元函数

2.1 多元函数微分学

1. **全微分**：函数在 $z=f(x,y)$ 点 (x_0,y_0) 处可微等价于

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

2. **偏导数连续的判断**：判断函数 $z=f(x,y)$ 在特殊点 (x_0,y_0) 处的偏导数是否连续：

1）用定义法求 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$，用公式法求 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$.

2）计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f_x'(x,y),\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f_y'(x,y)$，看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0),\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0)$ 是否成立，若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的.

3. **隐函数求导**：设 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 当满足 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y}&\dfrac{\partial F}{\partial z}\\\dfrac{\partial G}{\partial y}&\dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq0$ 时，可确定 $\begin{cases}y=y(x),\\z=z(x),\end{cases}$ 且有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\quad\frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},$$

4. **二元函数的二阶泰勒公式**：$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的二阶泰勒公式为：其中 $\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)+o(\rho^2).$$

2.2 空间解析几何

1. **空间曲线的切线与法平面**：

曲线：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$ 当 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y}&\dfrac{\partial F}{\partial z}\\\dfrac{\partial G}{\partial y}&\dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq0$ 时，取 $\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F_x'&F_y'&F_z'\\G_x'&G_y'&G_z'\end{vmatrix}=(A,B,C)$.

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{A}+\dfrac{y-y_0}{B}+\dfrac{z-z_0}{C}=0$. 法平面方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2. **旋转曲面**：曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 旋转一周形成的一个旋转曲面：设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$。在母线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过 M_1 的维圆上的任意一点 $P(x,y,z)$ 满足条件 $\overrightarrow{M_1P}\perp\boldsymbol{s},|\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|$，即

联立 $\begin{cases}m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0,\\(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2,\text{ 即得旋转曲面的方程。}\\F(x_1,y_1,z_1)=0,G(x_1,y_1,z_1)=0.\end{cases}$

3. **场论**：

1）**方向导数**：设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域 $U\subset\boldsymbol{R}^3$ 内有定义，l 为从点 P_0 出发的射线，$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 内的任一点，以 $t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 P 与 P_0 之间的距离.

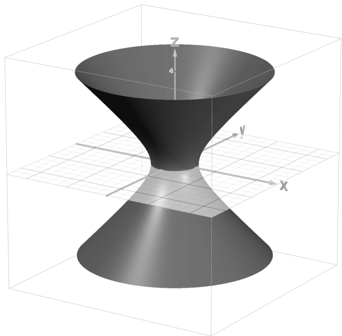
若极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$ 存在，则称此极限为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数。

计算：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=u_x'(P_0)\cos\alpha+u_y'(P_0)\cos\beta+u_z'(P_0)\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦。

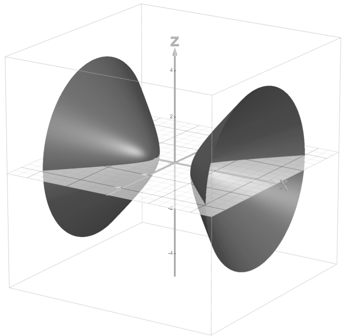
2）梯度：$\mathbf{grad}u|_{P_0}=(u_x'(P_0),u_y'(P_0),u_z'(P_0))$，函数在某点处的梯度是一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，它的模为方向导数最大值。$|\mathbf{grad}u|=\sqrt{(u_x')^2+(u_y')^2+(u_z')^2}$.

3）散度：$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$；旋度：$\mathbf{rotA}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

4. 双曲面：注意区分



单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$



双叶双曲面 $x^2-y^2-z^2=1$

2.3 多元函数积分学

换元法：取 $\begin{cases} x=x(u,v,\omega), \\ y=y(u,v,\omega), \\ z=z(u,v,\omega). \end{cases}$ 其中 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix}\neq 0$，则

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_{uv\omega}} f\left[x(u,v,\omega),y(u,v,\omega),z(u,v,\omega)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}\right|dudvd\omega.$$

1. 第一型曲线积分：边界方程可带入被积函数

1）空间情形：空间曲线 L 由参数式给出 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 则 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$，且

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

2）平面情形：

a. 平面曲线 L 由 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，则 $ds=\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f\left[x,y(x)\right]\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx.$$

b. 平面曲线 L 由参数式 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt.$$

c. 平面曲线由极坐标形式 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则 $ds=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f\left(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta\right)\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta.$$

2018-12 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xyds=\underline{-\dfrac{\pi}{3}}$.

$\oint_L=\dfrac{1}{6}\oint_L[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]ds.$

24 超越 3-2 曲线 $L: x^2+y^2=-2y$，则曲线积分 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds = \underline{8}$.

24 李林 6-2-14 曲线 $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y+z=0. \end{cases}$ 则 $I=\int_L(x^2+2y+2z)ds=\int_L x^2 ds=\underline{\pi}$.

注意轮换对称性条件

2. **第一型曲面积分：边界方程可带入被积函数**

1）一投：将曲面 Σ 投影到某一平面（如 xOy 面）上 $\Rightarrow$ 投影区域为 D（如 D_{xy}）；

2）二代：将 $z=z(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$ 代入 $f(x,y,z)$；

3）三计算：计算 z_x', z_y'，得 $dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy$，得到

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy.$$

3. **第二型曲线积分：**

1）化为定积分：平面有向曲线 L 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$ $(t:\alpha\to\beta)$ 给出，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{Px'(t)+Qy'(t)\}dt.$$

2）**格林公式**：设平面有界闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，则

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

a. 曲线封闭且无奇点在内部，直接用公式；

b. 曲线封闭但有奇点在内部，且除奇点外 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径；

c. 非封闭曲线且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径；

d. 非封闭曲线且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$，可补线使其封闭。

24 张八-1-4 被积函数为积分区域正向边界时值最大。

积分区域不是单连通区域时，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\nRightarrow\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关。

3）两类曲线积分的关系：其中 $(\cos\alpha,\sin\beta)$ 为 L 上点 (x,y) 处与 L 同向的单位切向量：

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\beta)ds.$$

4）空间问题：

a. 直接计算：设 $\Gamma: \begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), t:\alpha\to\beta, \\ z=z(t). \end{cases}$ 则有 $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\left[Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right]dt.$

b. **斯托克斯公式**：设 Ω 为某空间区域，Σ 为 Ω 内的分片光滑有向曲面片，Γ 为逐段光滑的 Σ 的边界，则有

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$ （第二型曲面积分形式）

若 $\boldsymbol{rotF}=0$，可换路径。

4. **第二型曲面积分：**

1）化为二重积分：拆成三个积分

2）转换投影法：若 Σ 投影到 xOy 平面上不是一条线，并且 Σ 上任意两点到 xOy 平面上的投影不重合，则可将 Σ 投影到 xOy 平面，设投影域为 D_{xy}，曲面方程写成 $z=z(x,y)$ 的形式，则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[P\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Q\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R\right]dxdy.$$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xz}}\left[P\left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right)+Q+R\left(-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right]dzdx.$$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{yz}}\left[P+Q\left(-\frac{\partial x}{\partial y}\right)+R\left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\right]dydz.$$

3）高斯公式：设空间有界闭区域 Ω 由分段光滑曲面 Σ 围成，则

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$$

a. 封闭曲面且内部无奇点，直接用公式；

b. 封闭曲面，有奇点在内部，且除奇点外 $div\boldsymbol{F}=0$，换个面积分；

c. 非封闭曲面，且 $div\boldsymbol{F}=0$，换个面积分；

d. 非封闭曲面，且 $div\boldsymbol{F}\neq 0$，补面使其封闭。

4）两类曲面积分的关系：其中 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 在点 (x,y,z) 处与 Σ 同侧的单位法向量。

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS.$$

5. 应用：

1）弧长：$l=\int_L ds=\int_a^b\sqrt{1+(y_x')^2}dx.$

2）曲面面积：$S=\iint\limits_{\Sigma} dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy.$

3）曲顶柱体体积：$V=\iint\limits_{D_{xy}}|z(x,y)|d\sigma.$

4）转动惯量：空间物体 Ω，对 x 轴、原点 O 的转动惯量：

$$I_x=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv,\quad I_O=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv.$$

3 微分方程

3.1 一阶微分方程

1. $y' + p(x)y = q(x)$，则 $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx + C\right]$.
2. 伯努利方程：$y' + p(x)y = q(x)y^n$，令 $z = y^{1-n}$，得 $\dfrac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$，则 $\dfrac{1}{n-1}\dfrac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$.

3.2 二阶可降阶的微分方程

1. $y'' = f(x, y')$：令 $y' = p, y'' = p'$，则 $\dfrac{dp}{dx} = f(x,p)$.
2. $y'' = f(y, y')$：令 $y' = p, y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot p$，则 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y,p)$.

3.3 高阶常系数线性微分方程

1. $y'' + py' + qy = f(x)$ 特解

微分算子：$y^* = \dfrac{1}{F(D)}f(x)$

1）$\dfrac{1}{F(D)}e^{\alpha x}$：

若 $F(D)\big|_{D=\alpha} \neq 0$，有 $y^* = \dfrac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = \dfrac{1}{F(D)\big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}$.

若 $F(D)\big|_{D=\alpha} = 0$，而 $F'(D)\big|_{D=\alpha} \neq 0$，有 $y^* = \dfrac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = x\dfrac{1}{F'(D)\big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}$.

若 $F(D)\big|_{D=\alpha} = F'(D)\big|_{D=\alpha} = 0$，而 $F''(D)\big|_{D=\alpha} \neq 0$，有 $y^* = \dfrac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = x^2\dfrac{1}{F''(D)\big|_{D=\alpha}}e^{\alpha x}$.

2）$\dfrac{1}{F(D^2)}\cos\beta x$ 或 $\dfrac{1}{F(D^2)}\cos\beta x$：

若 $F(D^2)\big|_{D=\beta i} \neq 0$，有 $y^* = \dfrac{1}{F(D^2)}\cos\beta x = \dfrac{1}{F(D^2)\big|_{D=\beta i}}\cos\beta x$.

若 $F(D^2)\big|_{D=\beta i} = 0$，有 $y^* = \dfrac{1}{F(D^2)}\cos\beta x = x\dfrac{1}{[F(D^2)]'}\cos\beta x$.

3）$\dfrac{1}{F(D)}(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k)$：$y^* = Q_k(D)(x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k)$.

4）$\dfrac{1}{F(D)}e^{\alpha x}v(x)$：$y^* = \dfrac{1}{F(D)}e^{\alpha x}v(x) = e^{\alpha x}\dfrac{1}{F(D+\alpha)}v(x)$.

2. 欧拉方程：$x^2y'' + pxy' + qy = f(x), x < 0$ 时，令 $x = -e^t$.

$x > 0$ 时，令 $x = e^t$，则 $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{x^2}\dfrac{d^2y}{dt^2}$ 即 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\dfrac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$.

3.4 n 阶常系数齐次线性微分方程的解

1. λ 为单实根，$Ce^{\lambda x}$.
2. λ 为重实根，$(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots + C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$.
3. λ 为单复根 $\alpha + \beta i$，$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.
4. λ 为二重复根 $\alpha + \beta i$，$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x + C_3x\cos\beta x + C_4x\sin\beta x)$.

24 李林 6-2-17 $\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{\sqrt{y^2-1}}{2} \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = \pm\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{y^2-4}}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{4} \Rightarrow \underline{y = C_1e^{\frac{1}{2}} + C_2e^{-\frac{1}{2}}}$.

4 无穷级数

4.1 判敛法

1. 比较判别法：p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1,\\ \text{发散}, & p\leqslant 1.\end{cases}$ 广义 p 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1,\\ \text{发散}, & p\leqslant 1.\end{cases}$

2. 常用结论：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})\text{收敛},\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})\text{不定}.\end{cases}$ $\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})\text{收敛},\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})\text{收敛}.\end{cases}$

> **2023-04** 已知 $a_n<b_n(n=1,2,\ldots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的<u>充要条件</u>。由题意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 为正项级数且绝对收敛，由三角不等式得
> $|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\leqslant|b_n-a_n|+|a_n|,\quad |a_n|=|a_n-b_n+b_n|\leqslant|b_n-a_n|+|b_n|$，即为充要条件。

4.2 幂级数

1. 收敛域：比值法和根值法只是计算幂级数收敛半径的<u>充分条件</u>，而不是必要条件。

> 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 的收敛半径为 R_1,则 $R_1\geqslant R$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散,则 $|r|\geqslant R_1\geqslant R$.

2. 和函数：直接套公式、先积后导或先导后积；用所给微分方程求和、<u>建立微分方程求和</u>。

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad -1<x\leqslant 1. \qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad -\infty<x<+\infty.$$
$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},\quad -1\leqslant x\leqslant 1. \qquad e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!},\quad -\infty<x<+\infty.$$
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad -\infty<x<+\infty. \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<+\infty.$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<+\infty. \qquad \frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad -\infty<x<+\infty.$$

4.3 傅里叶级数

1. 周期为 $2l$ 的傅里叶级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,(n=0,1,2,\cdots),\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,(n=1,2,3,\cdots).$$

2. 狄利克雷收敛定理：$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点},\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为间断点},\\ \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l.\end{cases}$

3. 只在 $[0,l]$ 上有定义的函数的正弦级数和余弦级数展开：

1）正弦级数：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,x\in[0,l],\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx(n=1,2,3,\ldots)$.

2）余弦级数：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,x\in[0,l],\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx(n=0,1,2,\ldots)$.

5 线性代数

5.1 行列式和矩阵

1. 代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$, 行列式: $|\boldsymbol{A}|=a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}(i=1,2,\ldots,n)$.

2. 矩阵的初等变换:"左行右列"。

> 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵:
> 1)若 $r(\boldsymbol{A})=n$(列满秩), 则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$; 若 $r(\boldsymbol{B})=n$(行满秩), 则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.
> 2)$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.
> 2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$, $\quad r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}\,[\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}])=r(\boldsymbol{A})$.
> 3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶方阵, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)$; 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

> 分块矩阵秩的常用结论:
> 1)$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$, $\quad r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.
> 2)当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$.
> 3)$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$, $\quad r\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.
> 4)$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$, $\quad r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{D})$.

5.2 向量组

1. 等价向量组: $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

2. 基坐标: 向量空间 V 中的任一向量 $\boldsymbol{\xi}$ 都可由这个基唯一地线性表示: $\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha_r}$. 称有序数组 $x_1,x_2,\ldots,x_r$ 为向量 ξ 在基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha_r}$ 下的坐标.

3. 过渡矩阵: 设 V 的两个基 $\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\ldots,\boldsymbol{\eta_n};\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\ldots,\boldsymbol{\xi_n}$, 若 $[\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\ldots,\boldsymbol{\eta_n}]=[\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\ldots,\boldsymbol{\xi_n}]\boldsymbol{C}$. 称 C 为由基 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\ldots,\boldsymbol{\xi_n}$ 到基 $\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},\ldots,\boldsymbol{\eta_n}$ 的过渡矩阵.

> **24 张八-2-7** n 维向量组 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n,),B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n,)$ 等价, 则
> $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\Rightarrow r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{B}^T)=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{B}^T\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O},\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{B}^T\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$同解.

5.3 线性方程组

1. 公共解: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的公共解即联立方程 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的解。

2. 同解方程组: 两个方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 和 $\boldsymbol{Bx}=0$ 有完全相同的解: $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$(三秩相同较方便)。

> $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^T)=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{b}^T\end{bmatrix}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{b}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 同解。

表 1: 线性方程组与空间平面、直线的关系

秩的情况	解的情况	位置关系
$r(\boldsymbol{A})=1, r(\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{b})=1$	有无穷解	三平面重合
$r(\boldsymbol{A})=1, r(\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{b})=2$	无解	三平面平行且三平面互异 两平面重合，第三个平面与之平行
$r(\boldsymbol{A})=2, r(\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{b})=2$	有无穷解	两平面相交，第三个平面与其中一个平面重合 三平面互异，相交于一条直线
$r(\boldsymbol{A})=2, r(\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{b})=3$	无解	两平面平行，第三个平面与这两个平面分别相交 三平面互不平行，两两相交
$r(\boldsymbol{A})=3, r(\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{b})=3$	有唯一解	三平面相交于一点

相似矩阵: 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T, \boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}, \boldsymbol{A}^m\sim\boldsymbol{B}^m, f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$.
若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

5.4 特征值与特征向量

表 2: 特征值及其对应的特征向量

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\lambda}$	λ	$f(\lambda)$
对应的特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$\boldsymbol{P}^{-1}\xi$	$\boldsymbol{P}^{-1}\xi$

1. 迹数：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素之和，等于特征值总和。$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.
2. 反对称矩阵：$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}(a_{ij}=-a_{ji}), r(\boldsymbol{A}_{3\times3})=2$.

5.5 二次型

1. n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 正定 $\Leftrightarrow\forall\boldsymbol{x}\neq0,\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}>0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p=n$ $\Leftrightarrow\exists\boldsymbol{D}$ 可逆，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于 0.

2. 同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的判定:

1）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

2）实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的正负惯性指数相同。

3）同阶实对称矩阵相似必合同。

24 张 4-2-07 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 与 $g(y_1,y_2,y_3)=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{By}$.
若存在可逆线性变换将 f 化为 g，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同；若不存在正交变换将 f 化为 g，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似。

2012-13 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T}$ 的秩为：2.
取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，则 $\begin{cases}r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant3,\\ r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant3.\end{cases}$ 所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3$，又 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\alpha^T})=1$，即 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T})=2$.

或者：$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^T)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\lambda_1=1,\\ r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^T)=1.\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\sim\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\Rightarrow(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T)\sim\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$.

6 概率论与数理统计

6.1 随机变量

1. **随机变量概率分布及其数字特征:**

表 3: 一维随机变量概率分布及其数字特征

分布	概率密度/概率分布	均值	方差
泊松分布	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,\dots)$	$EX=\lambda$	$DX=\lambda$
几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}(k=1,2,\dots)$	$EX=\dfrac{1}{p}$	$DX=\dfrac{1-p}{p^2}$
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{else}\end{cases}$	$EX=\dfrac{a+b}{2}$	$DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$EX=\dfrac{1}{\lambda}$	$DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$EX=\mu, E\|X-\mu\|=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma$	$DX=\sigma^2$

1. 分布函数: $F(x)$ 是分布函数 $\Leftrightarrow F(x)$ 是 x 的单调不减、右连续函数, 且 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$.
2. 若随机变量 X 分布函数 $F_X(x)$ 严格单调增加, 反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在, 则 $Y=F_X(X)\sim U(0,1)$.
3. 泊松定理: 若 $X\sim B(n,p)$, 当 n 很大, p 很小, $\lambda=np$ 适中时, 可用泊松分布近似表示, 即 $X\sim P(\lambda)$.
4. 设 X 为离散型随机变量, 分布律为 $P\{X=a_i\}=p_i(i=1,2,\dots)$, 则数学期望 EX 存在的:
充分条件: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2p_n$ 收敛, 必要条件: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_np_n$ 收敛.

2. **二维正态分布:** (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布, 记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

24 超越 1-22 $(X_1,X_2)\sim N$, $\begin{cases}Y_1=a_1X_1+a_2X_2\\ Y_2=b_1X_1+b_2X_2\end{cases}$, 且 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow (Y_1,Y_2)\sim N$.

3. 卷积公式: 设 $(X,Y)\sim f(x,y)$

1) $Z=X+Y$ 的概率密度函数为
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx\overset{\text{独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$
2) $Z=X-Y$ 的概率密度函数为
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx\overset{\text{独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)dx.$$
3) $Z=XY$ 的概率密度函数为
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx\overset{\text{独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)dy.$$
4) $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数为
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy\overset{\text{独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy.$$

$\max(X,Y)=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$, $\min(X,Y)=\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)$.

4. **切比雪夫不等式**：设随机变量 X 的 EX 与 DX 均存在，则

$$\forall \varepsilon > 0, P\{|X-EX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2} \text{或} P\{|X-EX| < \varepsilon\} \geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

设随机变量 $X \sim B(n,p), Y=e^X-2$，则 $EY=\underline{[(e-1)p+1]^n-2}$.

$$EY=\sum_{k=0}^{n}(e^k-2)\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(ep)^k(1-p)^{n-k}-2\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=(ep+1-p)^n-2(p+1-p)^n=(ep+1-p)^n-2=[(e-1)p+1]^n-2.$$

5. 相关系数：$Y=aX+b: a>0 \Rightarrow \rho_{XY}=1, a<0 \Rightarrow \rho_{XY}=-1$.

独立和相关性的判断：

1. X,Y 独立 $\Rightarrow$ X,Y 不相关，反之不；X,Y 相关 $\Rightarrow$ X,Y 不独立。
2. (X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ X,Y 不相关。
3. X,Y 均服从 $0-1$ 分布，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ X,Y 不相关。

24 超越 5-10 设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho), U=X+Y, V=X-Y$，$U$ 与 V 独立的充要条件为 $\underline{\sigma_1^2=\sigma_2^2}$.

(U,V) 服从二维正态分布，则 U,V 独立 $\Leftrightarrow$ U,V 不相关 $\Leftrightarrow$ $Cov(U,V)=DX-DY=0 \Leftrightarrow \sigma_1^2=\sigma_2^2$.

6.2 大数定理与中心极限定理

中心极限定理：设 X_i 独立同分布于某一分布，期望、方差均存在，当 $n\to\infty$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 服从正态分布，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\Phi(x).$$

6.3 统计量及其分布

1. χ^2 分布：若随机变量 $X_1,X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布，则随机变量 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布. $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha, EX=n, DX=2n$.

常见分布的**可加性**：

1. 二项分布：$X\sim B(n,p), Y\sim B(m,p) \Rightarrow X+Y\sim B(n+m,p)$.
2. 泊松分布：$X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2) \Rightarrow X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.
3. 正态分布：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \Rightarrow X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
4. χ^2 分布：$X\sim\chi^2(n), Y\sim\chi^2(m) \Rightarrow X+Y\sim\chi^2(n+m)$.

2. t 分布：设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$，$X$ 与 Y 相互独立，则随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/N}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布. $P\{t>t_\alpha(n)\}=\alpha, Et=0$.

3. F 分布：设随机变量 $X\sim\chi^2(n_1), Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布. $P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha, F\sim F(n_1,n_2)\Rightarrow\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$，若 $t\sim t(n)$，则 $t^2\sim F(1,n)$.

4. 正态总体下的常用结论：设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差，$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，则

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1),\quad\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n).$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1),\quad\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)\Rightarrow\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1).$$

设 X_1,X_2 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$(X_1+X_2)^2$ 与 $(X_1+X_2)^2$ 相互独立：
$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2},\quad S^2=(X_1-\dfrac{X_1+X_2}{2})^2+(X_2-\dfrac{X_1+X_2}{2})^2=\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2},$
$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，故 $(X_1+X_2)^2$ 与 $(X_1+X_2)^2$ 相互独立。

6.4 参数估计与假设检验

1. **矩估计**：

1）一个参数，用一阶矩建方程，令 $\overline{X}=EX$，**若一阶矩为 0**，用二阶矩建方程，令 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)$.

2）两个参数，用一阶矩和二阶矩建立两个方程.

2. **最大似然估计**：写似然函数 $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ 或 $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$.

1）若似然函数有驻点，令 $\dfrac{dL}{d\theta}$ 或 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$，解出 $\hat{\theta}$；2）若似然函数无驻点（单调），或为常数，用定义求 $\hat{\theta}$.

24 超越 6-22 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}bx, & 0\leqslant x<1,\\ ax, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$ 测得样本观察值为 $0.5,0.8,1.5,1.5$. 则 a 与 b 的最大似然估计为$\hat{a}=\dfrac{1}{3},\hat{b}=1$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow b=2-3a.\quad L=0.5b\cdot 0.8b\cdot(1.5a)^2\Rightarrow\dfrac{d\ln L}{da}=\dfrac{2}{a}-\dfrac{6}{2-3a}=0\Rightarrow\hat{a}=\dfrac{1}{3},\hat{b}=1.$

3. **估计量的评价**：

1）无偏性：$E\hat{\theta}=\theta$；2）有效性：$E\hat{\theta}_1=\theta,E\hat{\theta}_2=\theta$，**即均是无偏估计量**，当 $D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2=\theta$ 时，$\hat{\theta}_1$ 更有效.

3）一致性（相合性）：$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$.

4. **区间估计**：单个正态总体均值和方差的置信区间：设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,...,X_n$，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2。

1）σ^2 已知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

2）σ^2 未知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$.

3）μ 已知，σ^2 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$.

4）μ 未知，σ^2 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为：$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$.

5. **假设检验**：正态总体下的六大检验及拒绝域：

1）σ^2 已知，μ 未知，$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right]\cup\left[\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)$.

2）σ^2 未知，μ 未知，$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]\cup\left[\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty\right)$.

3）σ^2 已知，μ 未知，$H_0:\mu\leqslant\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$，拒绝域为 $\left[\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha},+\infty\right)$.

4）σ^2 已知，μ 未知，$H_0:\mu\geqslant\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$，拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}\right]$.

5）σ^2 未知，μ 未知，$H_0:\mu\leqslant\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$，拒绝域为 $\left[\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right)$.

6）σ^2 未知，μ 未知，$H_0:\mu\geqslant\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$，拒绝域为 $\left(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right]$.

6. **两类错误**：第一类错误（弃真）：$\alpha=P\{拒绝H_0|H_0为真\}$；第二类错误（取伪）：$\beta=P\{接受H_0|H_0为假\}$.